環の零因子や単元に関連したグラフの彩色数 (代数と言語のアルゴリズムと計算理論)

金光, 三男

数理解析研究所講究録
第1769巻 2011年 70-74

環の零因子や単元に関連したグラフの彩色数

中部大学現代教育学部　金光三男 (Mitsuo Kanemitsu)

College of Contemporary Education,
Chubu University

1. はじめに

零因子グラフは最初、[2](I.Beck、1988年)によって可換環を研究するのに導入された。可換環の元全体を頂点集合、異なる2つの頂点の積が0のとき隣接していると定義したグラフである。

その後、[1](D.F.Anderson and P.S.Livingston、1999年)は0を除いた零因子を頂点集合としてI.Beckの零因子グラフの誘導部分グラフとして定義し研究を行った。

[3](F.R.DeMeyer、T.McKenzie and K.Schneider、2002年)は、可換環の代りに半群を使用して考察を行った。

更に、非可換環[9](S.P.Redmond, 2002年)や半群[3](F.R.DeMeyer, T.McKenzie and K.Schneider, 2002年)に対しても、零因子グラフが研究されていて非可換環に対しては有向グラフが考察されている。

また、[10](S.P.Redmond、2003年)はイデアルに関する零因子グラフを定義して[1](D.F.Anderson and P.S.Livingston, 1998年)の零因子グラフを拡張した。このイデアルに関する零因子グラフの具体例は例えば、[6](神田隆至・金光三男, 2011年)がある。

多くのこれらの論文は、環や半群の代数的構造とグラフの性質との関係を調べることを目的としている。

ここでは、零因子グラフおよびそのグラフとは異なる可換環の単元に関するグラフ(単元グラフ)を定義して、主としてそれらのグラフの彩色数について探索する。

2. 零因子グラフとその固有多項式

Rは単位元1を持つ可換環とする。$Z(R)$はRの零因子全体の集合、$Z^*(R)$は0以外の零因子全体とする。またグラフ$G=(V,E)$はVを頂点集合、Eは辺集合を表すものとする。また$\mathbf{Z}$を整数環、$\mathbf{Z}_n$ $(=\mathbf{Z}/(n))$は整数環$\mathbf{Z}$の(n)による剰余類とする。

定義 ([2](I.S.Beck, 1988年)) グラフ$\Gamma_0(R)=(V,E)$が**I.Beckの(意味の)零因子グラフ**とは、$V=R$, Eの元$[a,b]$、即ち、a,bを結ぶ辺とは、異なる2つの頂点a,bに対して、$ab=0$のときをいう。

定義 ([1](D.F.Anderson and P.S.Livingston, 1999年)) グラフ $\Gamma(R) = (V, E)$ が、**零因子グラフ**であるとは、$V = Z^*(R)$(即ち、0以外の零因子全体の集合)、辺 $[a, b]$ は $ab = 0$ であるようなグラフをいう。言い換えると、$\Gamma(R)$ は頂点集合を0以外の零因子全体とする $\Gamma_0(R)$ の誘導部分グラフである。

有限可換環について考察すると、I.Beckの零因子グラフでは、正則元の次数はペンダント(次数1の頂点)で0とのみ隣接している頂点である。また0は他の全ての頂点と隣接しているから、グラフにおいて自明であるこれら正則元と0は除いて考察してよい。そうしたものが[1](D.F.Anderson and P.S.Livingston, 1999年)の零因子グラフである。

[2](I.Beck, 1988年)の定理：自然数 N の素因数分解を

$$N = p_1^{2n_1} p_2^{2n_2} \cdots p_k^{2n_k} q_1^{2m_1+1} q_2^{2m_2+1} \cdots q_r^{2m_r+1}$$

とする。但し、$p_1, p_2, \cdots, p_k, q_1, q_2, \cdots, q_r$ はどれも異なる素数とし、$n_1, n_2, \cdots, n_k$, $m_1, m_2, \cdots, m_r$ を負でない整数とする。

このとき、$\Gamma_0(\mathbf{Z}_N)$ の彩色数 $\chi(\mathbf{Z}_N)$ は

$$\chi(\mathbf{Z}_N) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \cdots q_r^{m_r} + r$$

I.Beckの証明は少し分かりにくいので、ここでは具体的な自然数 n を与えて、簡単に $\chi(\mathbf{Z}_n)$ を求める方法を述べてみよう。手法は同じだから $n = 63 = 3^2 \times 7$ で述べる。

例 1 整数 $n = 63 = 3^2 \times 7$。このとき、
$Z^*(\mathbf{Z}_{63}) = \{3, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 18, 21, 24, 27, 28, 30, 33, 35, 36, 39, 42, 45, 48, 49, 51, 54, 56, 57, 60\}$
だから、このグラフの位数は26である。これは、オイラー関数 $\varphi(63) = 36$ より、$63 - 36 - 1 = 26$ で計算できる。ここで、63の約数は、1, 3, 7, 9, 21, 63であるが、1, 63はここでは関係がないので捨てる。残りの約数3, 7, 9, 21についてこれを適当に4つのブロックに分割する([8](M.Kanemitsu, 2010年)参照)。

$$[21] = \{21, 42\},\ [9] = \{9, 18, 27, 36, 43, 54\},\ [7] = \{7, 14, 28, 35, 49, 56\},$$

$$[3] = \{3, 6, 12, 15, 24, 30, 33, 39, 48, 51, 57, 60\}$$

[21]の2頂点21と42は隣接していることに注意する。[3]の各頂点と[21]の2頂点は隣接しているから、例えば、$3 - 21 - 42$ は三角形をなす。[21]の各頂点と[9]の各頂点は隣接しているから、例えば、$21 - 9 - 42$ も三角形をなす。

従って各ブロックの元の個数 $|\ \ |$ は、$|[3]| = 12, |[21]| = 2, |[9]| = 6, |[7]| = 6$。これより、三角形の個数は $12 + 6 = 18$。サイズは $12 \times 2 + 1 + 6 \times 2 + 6 \times 6 = 73$。異

なる四辺形の個数 N_C は、[3], [21] の頂点を使用して出来る四辺形は、例えば 4-サイクル $3-21-6-42-3$ のタイプ。個数は

$$\binom{12}{2} \times 2。$$

[3], [21], [9] の各元を使用すると、例えば 4 ーサイクルは $3-21-9-42$ のタイプ。個数は、12×6、[9], [7] の各元を使用すると、例えば 4 ーサイクルは、$9-14-18-7$ のタイプ。個数は

$$\binom{6}{2} \times \binom{6}{2}。$$

[21], [9], [7] の各元を使用すると、例えば 4 ーサイクル $21-9-7-18-21$ のタイプ。個数は

$$2 \times \binom{6}{2} \times 6。$$

合計すると、$N_C = 558$。

2-マッチングの個数 N_M については、[5](Y.Jin and M.Kanemitsu, 2007 年) より、$N_M = 2016$. このグラフの固有多項式を $f(\lambda) = \lambda^{36} + C_1\lambda^{35} + C_2\lambda^{34} + C_3\lambda^{33} + C_4\lambda^{32} + \cdots$ とすると、$C_1 = 0, C_2 = -73, C_3 = -36, C_4 = N_M - 2N_C = 2016 - 2 \times 558 = 900$。

よってこのグラフの固有多項式 $f(\lambda) = \lambda^{26} - 73\lambda^{24} - 36\lambda^{23} + 900\lambda^{22} + \cdots$。また彩色数は $\chi(\Gamma(\mathbf{Z}_{63})) = 3$。

3. 単元グラフとその彩色数

定義 グラフ $W_0(R) = (V, E)$ が**単元グラフ**とは、$V = R, E$ の元 $[a, b]$(即ち、隣接している (辺をなす) とは、$a + b \in U(R)$ のときをいう。また $W_0(R)$ の誘導部分グラフ $W(R) = (V, E)$ が**制限単元グラフ**とは、$V = Z^*(R), E$ の元 $[a, b]$ は $a + b \in U(R)$ のときをいう。

上記の定義で $a + b \in U(R)$ を $a - b \in U(R)$ に代えたグラフについては [4](Y.Jin and M.Kanemitsu, 2002 年) や [7](M.Kanemitsu, 2008 年) がある。

例えば、$K = \mathbf{Z}_2$ とする。また $R_n^t = K[X_1, X_2, \cdots, X_n]/(X_1, X_2, \cdots, X_n)^t = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ とおく。この環に対して、$V = R_n^t$、異なる 2 頂点 a, b に対して $a - b \in U(R_n^t)$ のとき a と b は隣接すると定義したグラフを $G_2(R_n^t)$ とおく。

定理 1 ([4](Y.Jin and M.Kanemitsu, 2002 年)) (1) 点彩色数 $\chi(G_2(R_n^t)) = 2$
(2) 辺彩色数 $\chi'(G_2(R_n^t)) = 2^{{}_nH_1 + {}_nH_2 + \cdots + {}_nH_{t-1}}$。但し、${}_nH_r$ は重複組み合わせとする。

また、グラフ $T_n = (V, E)$ は、$V = \mathbf{Z}_n, [a, b] \in E \Leftrightarrow a - b \in U(\mathbf{Z}_n)$ とする。

定理 2([7](M.Kanemitsu, 2008 年)) n は整数で最小の素因数が p とする。

このとき、T_n の彩色数 $\chi(T_n) = p$。

例 2 $W(\mathbf{Z}_5)$ のグラフを考察しよう。頂点は $0,1,2,3,4$ の 5 個 (位数 5)、$U(\mathbf{Z}_5) = \{1,2,3,4\}$ である。辺は、$[0,1],[0,2],[0,3],[0,4],[1,2],[1,3],[2,4],[3,4]$ の 8 個 (サイズ 8)。0 に白、1, 4 に赤、2, 3 に青を彩色すると彩色数は 3 であることが分かる。

例 3 $n = 15 = 3\times 5$。$\mathbf{Z}_{15} = \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_5$。オイラー関数 $\varphi(15) = 8$ だから $|U(\mathbf{Z}_{15})| = 8$。実際、$U(\mathbf{Z}_{15})$
$= \{1,2,4,7,8,11,13,14\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}$。

$G = \{(\pm 1, \pm 1)\} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$ は乗法に関して群になる。この群を単元群 $U(\mathbf{Z}_{15})$ に作用させる。$U(\mathbf{Z}_{15}) \cong U(\mathbf{Z}_3) \times U(\mathbf{Z}_5)$ だから、$U(\mathbf{Z}_{15})/G = X_1 \amalg X_2$。但し、$X_1 = \{(1,1),(2,1),(1,4),(2,4)\}, X_2 = \{(1,2),(2,2),(1,3),(2,3)\}$ とする。

$$N = \frac{(|\mathbf{Z}_3 - 1|) \times (|\mathbf{Z}_5| - 1)}{|G|} = 2。$$

これより、$\mathbf{Z}_{15} = X_1 \amalg X_2 \amalg Y_1 \amalg Y_2$。ここで、$Y_1 = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)\}, Y_2 = \{(1,0),(2,0)\}$ とする。

異なる任意の 2 頂点 a, b に対して、どの a と b も隣接していないという性質を性質 (*) とする。

X_1, X_2, Y_1, Y_2 はどれも性質 (*) を満たす。X_1, X_2, Y_1, Y_2 から 1 つずつ元を取り出してくる。例えば、$\{(1,1),(1,2),(0,1),(0,1)\}$ はクリークをなす。よって彩色数 $\chi(W(\mathbf{Z}_{15})) \geqq 4$。一方、$X_1, X_2, Y_1, Y_2$ の各集合において、同じ集合に属する元には同じ色を彩色し、集合が異なるものには異なる色を彩色すると $\chi(W(\mathbf{Z}_{15})) \leqq 4$。よって、$\chi(W(\mathbf{Z}_{15})) = 4$ となる。

この例を一般化すると、

定理 3 整数 $n = p_1 p_2 \cdots p_r$ ($p_1, p_2, \cdots, p_r$ はどれも 2 でない異なる素数とする)。単元グラフ $W(\mathbf{Z}_n) = (V, E)$、即ち、$V = \mathbf{Z}_n, E \ni [a,b]$ に対して $a + b \in U(\mathbf{Z}_n)$ が辺である単純グラフとする。このとき、

$$\chi(W(\mathbf{Z}_n)) = \Pi_{i=1}^{N}(\frac{|\mathbf{Z}_{p_i}| - 1}{2}) + r。$$

これを更に一般化すると、

注意 1 環 $R = K_1 \times K_2 \times \cdots K_r$ ($\forall K_i (\neq 2)$ は体とする)。このとき、

$$\chi(W(R)) = \Pi_{i=1}^{N}(\frac{|K_i| - 1}{2}) + r$$

注意 2 上で $p_i = 2$ なる i が存在すれば、$\chi(W(\mathbf{Z}_n)) = 2$。

参考文献

[1] D.F. Anderson and P.S. Livingston, The zero-divisor graphs of a commutative ring, *J. Algebra* **217** (1999), 434-447.

[2] I.Beck, Coloring of a commutative ring, *J. Algebra* **116**, (1988), 208-226

[3] F.R.DeMeyer, T.McKenzie and K.Schneider, The zero-divisor graph of a commutative semigroup, *Semigroup Forum* **65**, (2002), 206-214

[4] Y.Jin and M.Kanemitsu, The chromatic numbers of simple graphs associated with a class of finite rings, *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, **2**(3), (2002), 301-315

[5] Y.Jin and M.Kanemitsu, Beck's graphs associated with $\mathbf{Z}_n$ and their characteristic polynomials, *International J. Applied Mathematics and Statistics*, **11**(V07), (2007), 81-93

[6] 神田隆至・金光三男、イデアルによるある零因子グラフと数学教育、広島工業大学紀要　教育編、第 10 巻 (2011), 27-30

[7] M.Kanemitsu, A note on graphs related to unit elements in $\mathbf{Z}_n$, *The Global J. Applied Mathematics and Mathematical Sciences* **1**(1), (2008), 51-52

[8] M.Kanemitsu, The number of distinct 4-cycles and 2-matchings of some zero-divisor graphs, *Automata, Formal Languages and Algebraic Systems*, edited by M.Ito, Y. Kobayashi and S.Shoji, (2010) 63-69, *World Scientific.*

[9] S.P,Redmond. The zero-divisor graph of a non-commutative ring, *International J. Commutative Rings*, **1**(4), (2002), 203-211

[10] S.P.Redmond, An ideal-based zero-divisor graph of a commutative ring, *Communications in Algebra* **31**(9), (2003), 4425-4443